

В.Л.Санжак
О некоторых решениях полиномов.

Рассмотрены некоторые способы получения корней полиномов. Приведено простое решение полинома третьей степени, которое может быть решено как с действительными коэффициентами, так и с комплексными коэффициентами (состоящими из действительной и мнимой частей), в отличие от решения Кардано, которое предполагает, что коэффициенты должны быть только действительными числами. Далее рассмотрены способы получения корней полиномов любой нечетной и четной степени (четной - конкретно для полинома шестой степени с предложенным способом получения и для других четных степеней полиномов, так как получающиеся в результате вычислений комплексные корни, точнее, мнимые составляющие корней, достаточно сильно влияют на итерационную сходимость к корню) с действительными коэффициентами для степеней полиномов $n > 4$ итерационным способом с привлечением дополнительных вычислений, приводящих к ускоренному получению корня. Для решения полинома четной степени сначала получается определенный полином нечетной степени. Далее предполагается, что полином имеет комплексные корни и на примере полинома шестой степени рассматривается решение полинома с нахождением корня, состоящего из действительной и мнимой частей. В заключении предложен простой итерационный способ получения корня для полинома пятой степени с действительными коэффициентами через два полинома третьей степени, которые образуются от исходного полинома пятой степени. Применяется способ получения начального значения корня через исходные коэффициенты полинома. Далее находится следующее итерационное приближение и т.д.

Ключевые слова: полиномы, полином 3-й степени, полином n -й степени, корни полинома, полином нечетной степени.

V.L.Sanzhak
On some solutions of polynomials.

Some ways of obtaining the roots of polynomials are considered. A simple solution of the third degree polynomial is given, which can be solved both with real coefficients and with complex coefficients (consisting of real and imaginary parts), in contrast to Cardano's solution, which assumes that the coefficients should only be real numbers. Further, methods of obtaining the roots of polynomials of any odd and even degree (even - specifically for a polynomial of the sixth degree with the proposed method of obtaining and for other even degrees of polynomials) are considered, since the complex roots obtained as a result of calculations, more precisely, the imaginary components of the roots, quite strongly affect the iterative convergence to the root) with real coefficients for the degrees of polynomials $n > 4$ in an iterative way with the involvement of additional calculations, leading to an accelerated root derivation. To solve a polynomial of even degree, you first obtain a definite polynomial of an odd degree. Further, it is assumed that the polynomial has complex roots and, using the example of a polynomial of the sixth degree, we consider the solution of the polynomial with finding the root consisting of the real and imaginary parts. In conclusion, we propose a simple iterative method for obtaining a root for a polynomial of the fifth degree with real coefficients in terms of two polynomials of the third degree, which are formed from the original polynomial of the fifth degree. The method is used to obtain the initial value of the root through the original coefficients of the polynomial. Next, the next iterative approximation is found, etc.

Key words: polynomials, polynomial of the 3rd degree, polynomial of the n -th degree, polynomial roots, polynomial of odd degree.

Цель исследования

Целью исследования был поиск решения полиномов с комплексными коэффициентами (для малых степеней полиномов), а также возможных решений для полиномов с целыми степенями $n > 4$.

Вычисления над комплексными числами (т.е. числами, состоящими из действительной и мнимой частей) будут всё сильнее влиять на точные науки, в том числе и на космологию.

Можно, например, предположить, что и так называемая тёмная материя может представлять собой некую «мнимую» величину(материю) относительно видимой части вселенной по координате времени. Ведь не могут тела во вселенной воздействовать мгновенно. Для этого

необходимо некоторое время, которое для нас представляется в виде темной материи (точнее, некой силой, проявляющей себя как темная материя). И можно предположить, что со временем комплексные величины будут всё сильнее влиять на все наши вычисления, ведь если некоторые параметры имеют мнимые составляющие, то сочетания таких комплексных величин могут дать ощутимую прибавку (или убыль) из-за мнимых составляющих.

В математике мнимые величины повсеместно проявляются при вычислениях полиномов [1-6]. Как известно, при решении квадратного уравнения (полинома второй степени), как и любого полинома чётной степени, корни с комплексными величинами могут появиться даже при действительных коэффициентах. Также решение квадратного уравнения возможно с комплексными коэффициентами, в отличие от решения кубического полинома, которое, как известно, решается с помощью формулы Кардано [1]. В источниках по поводу решения данной формулой указывается, что коэффициенты должны быть только действительными. Таких ограничений на коэффициенты нет при варианте, рассматриваемом ниже (решения находятся при любых комплексных коэффициентах).

Итак, если в кубическом полиноме

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0 \quad (1)$$

выполняется следующее соотношение коэффициентов:

$$a_1^2 - 3 a_2 = 0 \quad (2)$$

то переписав уравнение (1) так:

$$y^3 + 3 a_1/3 y^2 + 3 (a_1/3)^2 y + (a_2 - a_1^2/3) y + a_3 = 0$$

видим, что условие (2) приводит к простому решению полинома:

$$(y + a_1/3)^3 = a_1^3/27 - a_3$$

И только при невыполнении условия (2), было найдено ещё одно решение кубического полинома, но уже с любыми комплексными коэффициентами:

$$a_1^2 - 3 a_2 \neq 0$$

переходим к подстановке :

$$y = x + k$$

После перехода к промежуточному корню x и делением на куб, полином преобразуется к виду:

$$\frac{k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3}{x^3} + \frac{3k^2 + 2a_1 k + a_2}{x^2} + \frac{3k + a_1}{x} + 1 = 0$$

Теперь в этом уравнении делим все члены на числитель первого члена и применяем подобие условия (2), т.е. здесь условие (2) обеспечивает некая неизвестная величина k :

$$\left(\frac{3k^2 + 2a_1 k + a_2}{k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3} \right)^2 - \frac{3(3k + a_1)}{k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3} = 0$$

Решая это выражение, получаем *квадратное* уравнение относительно величины k :

$$k^2(a_1^2 - 3a_2) + k(a_1 a_2 - 9a_3) + a_2^2 - 3a_1 a_3 = 0$$

Значение k будет :

$$k = \frac{9a_3 - a_1 a_2 \pm \sqrt{(a_1 a_2 - 9a_3)^2 - 4(a_1^2 - 3a_2)(a_2^2 - 3a_1 a_3)}}{2a_1^2 - 6a_2}$$

Теперь выражение для нахождения промежуточного корня x будет таким:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{k^2 + \frac{2}{3} a_1 k + \frac{a_2}{3}}{k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3} \right)^3 = \left(\frac{k^2 + \frac{2}{3} a_1 k + \frac{a_2}{3}}{k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3} \right)^3 - \frac{1}{k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3}$$

Отсюда находим x – из:

$$\frac{1}{x} = -\frac{k^2 + \frac{2}{3}a_1k + \frac{a_2}{3}}{k^3 + a_1k^2 + a_2k + a_3} + \left[\left(\frac{k^2 + \frac{2}{3}a_1k + \frac{a_2}{3}}{k^3 + a_1k^2 + a_2k + a_3} \right)^3 - \frac{1}{k^3 + a_1k^2 + a_2k + a_3} \right]^{\frac{1}{3}}$$

а затем и корень $y = x + k$.

В случае

$$k^3 + a_1k^2 + a_2k + a_3 = 0$$

получаем квадратное уравнение относительно величины x .

Решение полинома 4-й степени, приведенное в [6], возможно также с любыми комплексными коэффициентами. Решение же полиномов со степенью, большей 4, как известно, в общем виде не существует. Ниже будет рассмотрен итерационный способ решения таких полиномов, но с действительными коэффициентами. Итак, пусть имеется полином некой степени n с действительными коэффициентами:

$$F(y) = y^n + c_1y^{n-1} + c_2y^{n-2} + c_3y^{n-3} + \dots + c_{n-1}y + c_n = 0 \quad (3)$$

Получение корня будет итерационным с использованием по возможности способов минимизации вычислений (уменьшения числа итераций). Для начала рассмотрим способ получения корня полинома любой нечетной степени. Для четной степени будет рассмотрено ниже.

Конечно, корень следует искать внутри всего диапазона действительных чисел: от $-\infty$ до $+\infty$.

Однако, как было выяснено, корень с максимальным значением не выходит за границу

$$g = 1 + \sum_{k=1}^n |c_k|^{\frac{1}{k}}$$

Поэтому достаточно просмотреть 4 диапазона (вычисляя остатки $F(y)$ на границах):

$$[-g, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, g]$$

Т.е. на границах $g_i = -g, -1, 0, 1, g$

Для полинома нечетной степени обязательно найдется диапазон, где граничные остатки $F(y=g_i)$ и $F(y=g_{i+1})$ имеют разные знаки. В этом диапазоне и будет хотя бы один корень.

Диапазонов с разными знаками на границах может быть и не одно, в этом случае лучше взять диапазон с наименьшей разницей расхождения. Пусть это будет диапазон с граничными остатками (с противоположными знаками) F_u (с начальным – итерационным – значением границы $g_i = r_u$) и F_v ($g_{i+1} = r_v$).

Для получения следующего итерационного значения, ведущего к корню, используем следующее выражение:

$$r_0 = r_u + (r_v - r_u) \frac{F_u}{F_u - F_v} \quad (4)$$

Может так случиться, что в некоторых случаях граничных значений F_u или F_v величина r_0 может выйти за диапазон r_u, r_v . В это случае делаем проверку, предварительно используя некую величину w . И при значении $F_u < 0, F_v > 0$, но $r_v < r_u$, берем $w = -1$, иначе $w = 1$.

Теперь, в случае если

$$r_0 * w < r_u * w, \text{ либо } r_0 * w > r_v * w \quad (5)$$

- это вариант выхода за границы, берем

$$r_0 = (r_u + r_v) / 2$$

где r_u, r_v граничные значения $(-g, -1, 0, \dots)$, и $F_u = F(r_u), F_v$ - их остатки (один со знаком плюс, другой – со знаком минус).

Полученное значение r_0 может сразу привести в область корня и(или) позволяет, по его остатку $F(r_0)$ – знаку остатка, сузить область нахождения корня. Теперь, можно было бы в соответствии знака остатка $F(r_0)$, заменить значения r_u, F_u (либо r_v, F_v) в формуле (4) и

получить новое приближение к корню полинома (3), до $F(r_0)=0$, что означает нахождение корня $y = r_0$. Но, как показали вычисления, это ведет к медленной сходимости к корню. Был найден путь, который приводит к корню быстрее. Итак, заменяем в соответствии полученного значения – знака остатка- $F(r_0)$ величину F_u , либо F_v .

Для получения следующего итерационного цикла вычисляем некую величину $m = |F_u / F_v|$ т.е. соотношение граничных остатков по абсолютной величине. Для оптимальных вычислений были выбраны ограничения: при $m > 12$, берем $m = 10$; при $m < 1/12$ берем $m = 0.1$

Вычисляем новое значение приближения к корню:

$$r_1 = [r_u * (1 + 1/m) + r_v * (1 + m)] / (2 + m + 1/m)$$

Отсюда получаем новый остаток $F(r_1)$, которым заменяем, в зависимости от знака, F_u или F_v . Теперь используем и 3-й, последний этап вычисления в итерационном цикле (состоящий из 3-х этапов, дающих ускоренное приближение к корню). Итак, берем знаки полученных остатков $F(r_0)$ и $F(r_1)$:

$$s_0 = \text{sgn}(F(r_0)), s_1 = \text{sgn}(F(r_1))$$

где s_0 и s_1 принимают одно из 3-х значений: -1, 0, 1. При значении 0 корень считается найденным и равным соответственно r_0 , либо r_1 .

При ненулевых значениях остатков берем сумму $s = s_0 + s_1$. И если она по абсолютной величине равна 2 (т.е. при остатках по одну сторону от 0 - с одинаковым знаком), то вычисляем

$$r_0 = [r_u * (s/4 + 3/2) + (-s/4 + 3/2) * r_v] / 3 \quad (6)$$

Т.е. в этом случае вполне можно взять не половину области, а только третью часть. И переходим к проверке (5). В случае $s = 0$, т.е. остатки $F(r_0)$ и $F(r_1)$ имеют разные знаки, переходим к вычислению значения по формуле (4). И т.д.

В принципе можно в промежуточных частях, очевидно, брать и некоторые другие разбиения искомой области, однако, можно получить, как ускорение перехода к корню, так и замедление.

Теперь о полиноме чётной степени с действительными коэффициентами.

Здесь имеется 2 варианта : $n = 4k + 2$ и $n = 4k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$

Из полинома (3) получаем 2 полинома

$$P_1(y) = y^{2k+1} + c_1 y^{2k} + c_2 y^{2k-1} + c_3 y^{2k-2} + \dots + c_{2k} y + c_{2k+1} = 0$$

$$P_2(y) = c_{2k+2}/y + c_{2k+3}/y^2 + c_{2k+4}/y^3 + \dots + c_{n-1}/y^{n-2k-2} + c_n/y^{n-2k-1} = 0$$

Для работы нам потребуется составной как бы «нечетный» полином: $P(y) = P_1(y) + P_2(y)$

Кстати, $P(y) * y^{n-2k-1} = F(y)$. Также вычисляем некую величину g :

$$g = 1 + \sum_{k=1}^n |c_k|^{1/k} \quad (7)$$

Которая будет находиться вблизи значения вероятного максимального корня.

Теперь всю область действительных чисел разбиваем на 3 части:

$$[-g, -1], [-1, 1], [1, g] \quad (8)$$

В чётном полиноме с действительными коэффициентами могут быть корни и с действительными значениями, и с комплексными значениями (с мнимой составляющей), которые попарно составляют сопряженные значения корней :

$$y_1 = r_d + i * r_m, y_2 = r_d - i * r_m \quad (9)$$

и образуют (и вводят в полином) квадратное уравнение без мнимой составляющей:

$$y^2 + v_1 * y + v_2 = 0$$

$$\text{где } v_1 = -2 * r_d, v_2 = r_d^2 + r_m^2.$$

В общем, уравнение (3) теперь можно представить в виде

$$F(y^n) = F(y^{n-2}) * (y^2 + v_1 * y + v_2) = 0$$

Случай, если v_2 не имеет комплексной составляющей, является частным и также находится по приведенному ниже способу. Для начала граничные значения (8) применим к полиному $P(y)$ – т.е. находим остатки $P(g_i)$, где $g_i = -g, -1, 1, g$.

У нас возможны либо 1, либо 3 варианта смены знака (+-) на границах областей. Остаток $P(-g)$ будет всегда иметь отрицательный знак, $P(g)$ – всегда положительный. При 3-х вариантах выбираем либо 1-ю область, либо 3-ю, там, где остатки образуют меньший разброс. И только при единственном варианте, когда смена знака происходит в средней области: $[-1, 1]$, вместо $P(y)$ будем использовать $P_1(y)$. В этом случае опять проверяем смену знаков остатков, только уже $P_1(y)$ на границах областей (8). Как правило, оно может указать на 1-ю или 3-ю область в (8). И только, если снова будет указана средняя область, берем первую, т.е. $[-g, -1]$.

Теперь мы подошли к получению начального значения r_d . Его мы получаем по подобию нечетного полинома: уравнения (4) – (6).

После получения начального значения r_d , если, вместо $P(y)$, использовался $P_1(y)$, окончательное предварительное значение r_0 вычисляем, используя в вычисленных точках r_u, r_v остатки $P(r_u), P(r_v)$.

Будем считать, что начальное значение r_d из уравнения (9) получено. Здесь может быть случай, что остаток $P(r_d)$ является достаточно малой величиной: например, если взять за критерий определения малости остатка величину g из (7), и остаток $P(r_d)$ будет на несколько порядков меньше этой величины g , то можно предположить, что, во-первых, корень скорее всего найден и находится вблизи значения r_d , а во-вторых это действительный корень (нет мнимой составляющей). Если корень имеет мнимую составляющую, то, очевидно, остаток $P(r_d)$ будет далек от минимальных значений и критерий сравнения малости со значением g из (7) выполняться не будет. В этом случае переходим ко второму этапу нахождения корня(корней, в случае сопряжения).

Получаем начальное значение $v_1 = -2*r_d$.

Теперь для примера, рассмотрим случай $n = 6$.

Для решения уравнение (3) предполагалось равным:

$$F(y) = (y^2 + m_1y + m_2)*(y^2 + m_3y + m_4)*(y^2 + v_1y + v_2)$$

Получилась система из шести уравнений относительно неизвестных $m_1, m_2, m_3, m_4, v_1, v_2$.

При решении все m_k определяются относительно коэффициентов c_k .

В итоге остается система из 2-х уравнений, состоящая из искомых величин $v_1 (= -2*r_d)$ и $v_2 (= r_d^2 + r_m^2)$ вместе с коэффициентами c_k уравнения (3), которую можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} H_1(v_{1,2}, c_k) &= v_1^2(v_2^3 - c_6) + v_1v_2(c_5 - c_1v_2^2) - v_2^4 + c_2v_2^3 - c_4v_2^2 + c_6v_2 = 0 \\ H_2(v_{1,2}, c_k) &= v_2^3(c_1 - 2v_1) + v_2^2(c_2v_1 - c_3 + v_1^3 - c_1v_1^2) + c_5v_2 - c_6v_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из этой системы получаем выражение для нахождения v_2 :

$$v_2(b_1b_3^2 - b_2b_3 + b_3b_4b_5 - b_5^2) = b_2b_5 - c_6b_3^2 - b_2b_3b_4 \quad (11)$$

где

$$b_1 = c_3v_1 - c_2v_1^2 - v_1^4 - c_4 + c_1v_1^3; \quad b_2 = c_1c_6 - 3c_6v_1$$

$$b_3 = 5v_1^3 - 6c_1v_1^2 + v_1(c_2 + 2c_1^2) - c_1c_2 + c_3; \quad b_4 = c_2 + 3v_1^2 - 2c_1v_1$$

$$b_5 = 2v_1^5 - 3c_1v_1^4 + v_1^3(c_1^2 + 2c_2) - v_1^2(c_1c_2 + 2c_3) + v_1(c_1c_3 + 2c_4) - c_1c_4 + c_5$$

Таким образом, получаем и начальное значение v_2 , благодаря которому мы можем получить следующее уточнённое выражение для v_1 , которое также можно получить из системы (10):

$$v_1 = v_2[(c_6 - v_2^3)(c_1v_2^5 - c_3v_2^4 + c_5v_2^3 - c_1c_6v_2^2 + c_3c_6v_2 - c_5c_6) + v_2^2(c_1c_6 - c_5v_2)(c_6 - v_2^3 + c_2v_2^2 - c_4v_2)] / [(c_6 - v_2^3)(v_2^6 - c_4v_2^4 + c_2c_6v_2^2 - c_6^2) + v_2^3(c_5v_2 - c_1c_6)(c_5 - c_1v_2^2)]$$

Обозначим это уточнённое значение как v_{1_1} .

Итак, после получения на первом этапе начального значения v_1 , затем по формуле (11)

значения v_2 , получается уточненное значение $v_1 = v_{1_1}$. В целом, в конечном итоге мы

получим истинные значения v_1 и v_2 . Но в начальных циклах итерации значения v_1, v_{1_1}

могут быть далеки от истинных значений v_1 . В общем, к дальнейшим вычислениям используем $v_{1,2} = (v_1 + v_{1,1})/2$.

Теперь, подставляем в систему (10) сначала пару v_1, v_2 и получаем остатки H_1, H_2 .

Суммируем эти 2 остатка по их абсолютным значениям: $Z_1 = |H_1| + |H_2|$

Затем подставляем в систему пару $v_{1,2}, v_2$ и получаем другие остатки $H_{1,1}, H_{2,1}$.

Также получаем из них сумму их абсолютных значений: $Z_2 = |H_{1,1}| + |H_{2,1}|$

И наконец, получаем знаки (+/-) сумм остатков: $s_1 = \text{sgn}(H_1 + H_2)$; $s_2 = \text{sgn}(H_{1,1} + H_{2,1})$

где s_1 и s_2 могут принять одно из 3-х значений: -1, 0, 1.

Следующее итерационное значение $v_1 (=v_{1,3})$ определяется по 3-м вариантам:

V1. Если сумма $s_1 + s_2 = 0$, то $v_{1,3} = (v_1 + v_{1,2})/2$

V2. При невыполнении условия V1, если $Z_2 < Z_1$, то $v_{1,3} = v_{1,2}$

V3. Если не выполняются условия V1 и V2, то $v_{1,3} = v_1 + (v_{1,2} - v_1) * Z_1 / (Z_1 - Z_2)$

Таким образом для получения конечных значений v_1, v_2 подставляем найденное v_1 , находим

v_2 , подставляем v_2 , находим уточненное v_1 и т.д. Также можно на каждом этапе(цикле)

производить проверку на величину остатка исходного уравнения (3). Т.е., в очередном

цикле находим r_d и r_m посредством промежуточных вычислений: получаем некие $p_1 = -$

$v_{1,3}/2$; $p_2 = p_1^2 - v_2$; $r = (|p_2|)^{1/2}$

Если $p_2 \geq 0$, то $r_d = p_1 + r$, $r_m = 0$ (и 2-й вариант: $r_{d,2} = p_1 - r$; $r_{m,2} = 0$); иначе $r_d = p_1$, $r_m = r$ (2-й

вариант: $r_{d,2} = p_1$; $r_{m,2} = -r$).

Теперь, имея в итерационном цикле вычисленные значения $y_1 = r_d + i*r_m$ и $y_2 = r_{d,2} + i*r_{m,2}$

находим остатки $F(y_1)$ и $F(y_2)$ уравнения (3) для действительной части и мнимой:

так для действительной части $F(y_1)$ при $n=6$ получим:

$F(y_1)_d = r_d^6 - 15r_d^4r_m^2 + 15r_d^2r_m^4 - r_m^6 + c_1(r_d^5 - 10r_d^3r_m^2 + 5r_dr_m^4) + c_2(r_d^4 - 6r_d^2r_m^2 + r_m^4) +$
 $+ c_3(r_d^3 - 3r_dr_m^2) + c_4(r_d^2 - r_m^2) + c_5r_d + c_6$

И для мнимой части:

$F(y_1)_{mn} = 6r_d^5r_m - 20r_d^3r_m^3 + 6r_dr_m^5 + c_1(5r_d^4r_m - 10r_d^2r_m^3 + r_m^5) + c_2(4r_d^3r_m - 4r_dr_m^3) +$
 $+ c_3(3r_d^2r_m - r_m^3) + c_4(2r_dr_m) + c_5r_m$

Также получаем и для $F(y_2)$. Для работы нам нужна сумма остатков абсолютных значений:

$F_1 = |F(y_1)_d| + |F(y_1)_{mn}|$; $F_2 = |F(y_2)_d| + |F(y_2)_{mn}|$

Значения остатков могут привести к таким 2-м вариантам:

- одно из значений: F_1 или F_2 имеет довольно малую величину (например, на порядок меньше значения g – из (7), принятом критерием малости остатка). В этом случае можно считать, что найденные значения r_d, r_m находятся вблизи значения искомого корня. При $r_m=0$ корень имеет действительное значение.

- значения F_1 и F_2 имеют примерно одинаковые значения и плавно уменьшаются от итерации к итерации. В этом случае корни, скорее всего комплексные и стоит продолжать итерационные циклы до получения, например, критерия малости остатка (остаток на порядок меньше величины g).

Теперь, в случае не первого итерационного цикла, если остатки F_1, F_2 довольно большие, или v_1 отличается от $v_{1,3}$, например, на величину, большую в 7 %, вычисляем конечную в цикле величину $v_1 = (v_1 + v_{1,3})/2$, иначе берем $v_1 = v_{1,3}$. И переходим к вычислению величины v_2 – уравнение (11), что будет означать переход на очередной итерационный цикл.

Дополнительно можно делать анализ на приближение к корню $y (=r_d + ir_m)$ - значений y_1 и y_2 , переходящие от цикла к циклу, и если их разность, например, будет меньше какой либо малой величины(например 10^{-5}), то тоже можно принять, что корень найден.

Таким же способом можно составить подобие системы (10) и для $n = 8$ для нахождения корня полинома 8-й степени и т.д.

Также для полинома 5-й степени с действительными коэффициентами есть ещё один способ числового итерационного решения через полином 3-й степени. Итак, представим полином 5-й степени таким образом:

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y = -a_3 - a_4/y - a_5/y^2 \quad (12)$$

И для ускоренного решения «обратное» :

$$1/y^3 + (a_4/a_5) 1/y^2 + (a_3/a_5) 1/y = -a_2/a_5 - (a_1/a_5) y - y^2/a_5 \quad (13)$$

Здесь в правые части уравнений (12) и (13) будем ставить приближённые значения y_0 .

Так начальное значение y_0 для уравнения (12) находим следующим способом:

Получаем некие g_1 и g_2 :

$$g_1 = \sum_{k=1}^5 (-1)^k s_k |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

где здесь и далее s_k – это знак коэффициента a_k , принимающий значение -1, 0, +1.

$$g_2 = -\sum_{k=1}^5 s_k |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

Теперь при условии

$$[s(g_1) + s(g_2)]/(-s_5) = 2 \quad (14)$$

где здесь и далее $s(g_1)$ – это знак числа g_1 , $s(g_2)$ – знак числа g_2 ,

получаем начальное значение $y_0 = (g_1 + g_2)/2$

При невыполнении условия (14), проверяется условие равенства $s(g_1) = -s_5$. При выполнении этого условия берем $y_0 = g_1$, иначе $y_0 = g_2$.

Решаем полином 3-й степени, исходя из уравнения (12):

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y = -a_3 - a_4/y_0 - a_5/y_0^2 \quad (15)$$

где получаем 3 корня.

Примерно таким же способом ищем начальное значение (пусть y_1) для уравнения (13):

Снова получаем некие g_1 и g_2

$$g_1 = \sum_{k=0}^4 (-1)^{k+1} s_{k5} |a_k / a_5|^{\frac{1}{5-k}}$$

где s_{k5} – это знак дроби коэффициентов: a_k/a_5 , $a_0 = 1$

$$g_2 = -\sum_{k=0}^4 s_{k5} |a_k / a_5|^{\frac{1}{5-k}}$$

Теперь также находим начальное значение y_1 из условий: при $(s(g_1) + s(g_2))/(-s_5) = 2$

значение $y_1 = 2/(g_1 + g_2)$

При невыполнении этого условия проверяем равенство $s(g_1) = -s_5$ и если оно имеет место, то берем $y_1 = 1/g_1$, иначе $y_1 = 1/g_2$.

Также решаем «обратный» полином 3-й степени:

$$1/y^3 + (a_4/a_5) 1/y^2 + (a_3/a_5) 1/y = -a_2/a_5 - (a_1/a_5) y_1 - y_1^2/a_5 \quad (16)$$

Отсюда получаем некий корень $1/y$ (точнее 3 корня), где в знаменателе следующее приближение корня y_2 .

Теперь, получив ближайшие по значению приближения - из уравнений (15) и (16), можно определить следующее приближенное значение корня этого итерационного цикла: пусть из уравнения (15) приближенным значением является некая величина y_{01} , из (16) некая величина y_{02} , тогда при условии $[s(y_{01}) + s(y_{02})]/(-s_5) = 2$, где $s(y_{01})$ и $s(y_{02})$ – это знаки чисел y_{01} и y_{02} , получаем следующее приближение $y_3 = (y_{01} + y_{02})/2$, при невыполнении условия проверяем равенство $s(y_{01}) = -s_5$, и если оно выполняется, то $y_3 = y_{01}$, иначе $y_3 = y_{02}$.

Проверяем остаток полинома $F(y = uz)$ по формуле (3). И если он достаточно мал, то считаем, что корень находится вблизи значения uz . В противном случае переходим к очередному итерационному циклу определения корня по уравнениям (15) и (16).

Литература

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986, стр.146
2. Анкилов А.В., Высшая математика, Ульяновск: УлГТУ, 2011
3. Васильев А.В., Лыткина Д.В., Мазуров В.Д., Высшая алгебра. Новосибирск.: Издательство Института Математики, 2020
4. Меленцева Ю.А., Основы высшей математики. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2017
5. Выгодский М.Я., Справочник по элементарной математике. М: АСТ: Астрель, 2014
6. Санжак В.Л., О решении полиномов с комплексными коэффициентами и полиномов высших степеней. "Фундаментальные исследования", 2008, 11

Автор: Санжак Владимир Леонидович

Советник Академии Естествознания (Диплом 10381 от 8 мая 2020 г.)

Email: san.vl@rambler.ru